Variação de grandezas: diretamente proporcionais inversamente proporcionais ou não proporcionais

Prof. Marcos Brandão

Inversamente proporcionais

Dizemos que duas grandezas são inversamente proporcionais quando uma aumenta e a outra diminui na mesma proporção. Assim,

Inversamente proporcionais

- dobrando uma grandeza, a correspondente reduz pela metade;

Inversamente proporcionais

- dobrando uma grandeza, a correspondente reduz pela metade;
- triplicando uma grandeza, a outra reduz para terça parte.

Inversamente proporcionais

As grandezas velocidade e tempo são exemplos de grandezas inversamente proporcionais. Na tabela a seguir vamos observar valores de velocidade em km/h e os respectivos tempos gastos em horas para realizar um percurso de um veículo que completa tal percurso com uma velocidade de 120 km/h em 1 hora.

Inversamente proporcionais

Um veículo que faz um percurso com uma velocidade de 120 km/h em 1 hora.

Tempo (h)	2	3	4	5	6
Velocidade (km/h)	60	40	30	24	20

Inversamente proporcionais

Quando relacionamos duas grandezas que são inversamente proporcionais, temos que a multiplicação entre seus valores correspondentes é constante.

Inversamente proporcionais

Tempo (h)	2	3	4	5	6
Velocidade (km/h)	60	40	30	24	20

$$2 \cdot 60 = 3 \cdot 40 = 4 \cdot 30 =$$

$$= 5 \cdot 24 = 6 \cdot 20 = 120.$$

Inversamente proporcionais

Tempo	2	3	4	5	6	...	x
Velocidade	60	40	30	24	20	...	y

Temos então que

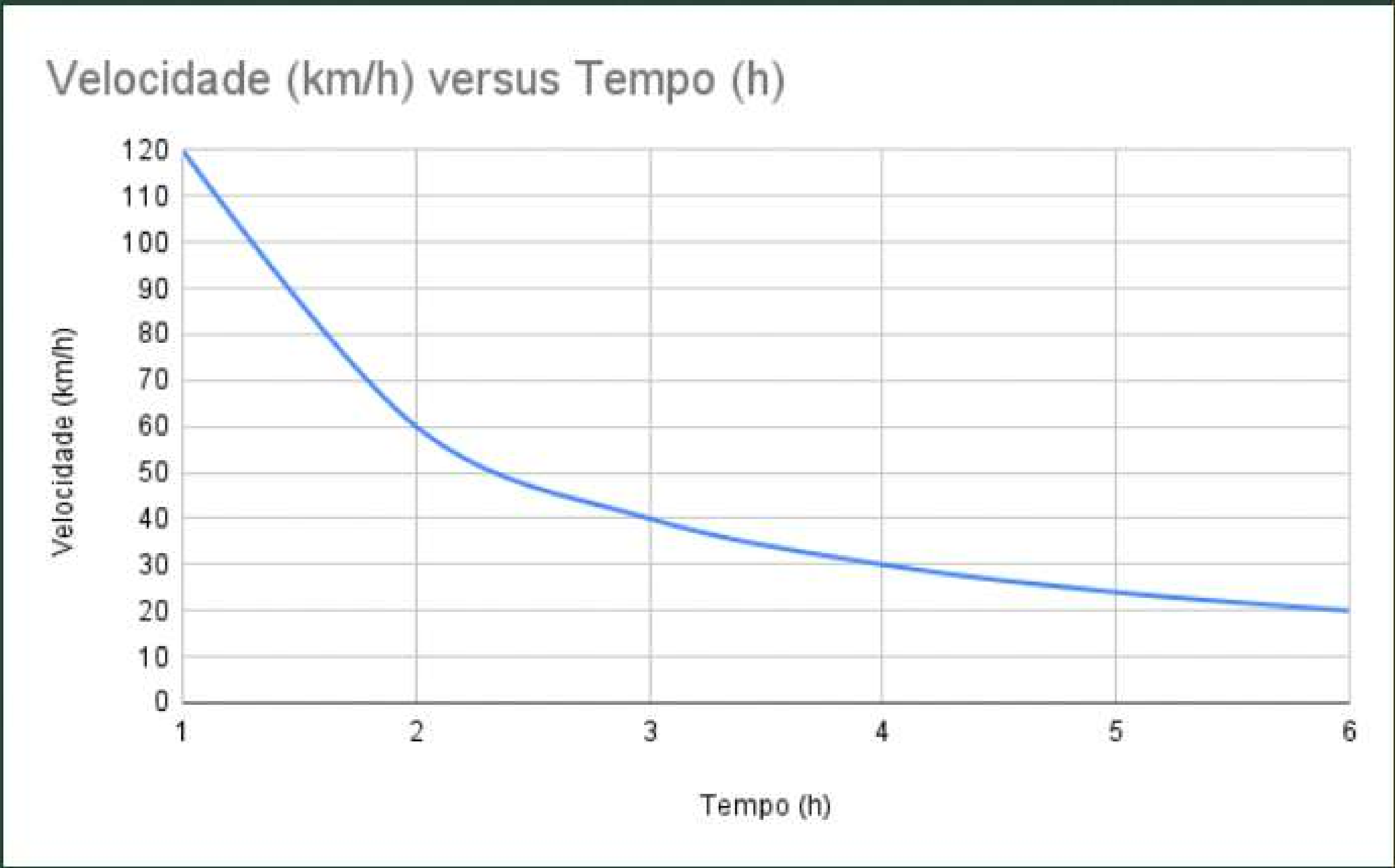
$$x \cdot y = 120.$$

Inversamente proporcionais

A partir daí podemos escrever

$$y = \frac{120}{x}.$$

Isso significa que para o automóvel realizar o percurso em x horas ele precisar estar a uma velocidade de $y = \frac{120}{x}$.


Velocidade (km/h) versus Tempo (h)
Velocidade (km/h)
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
1
2
3
4
5
6
Tempo (h)

Inversamente proporcionais

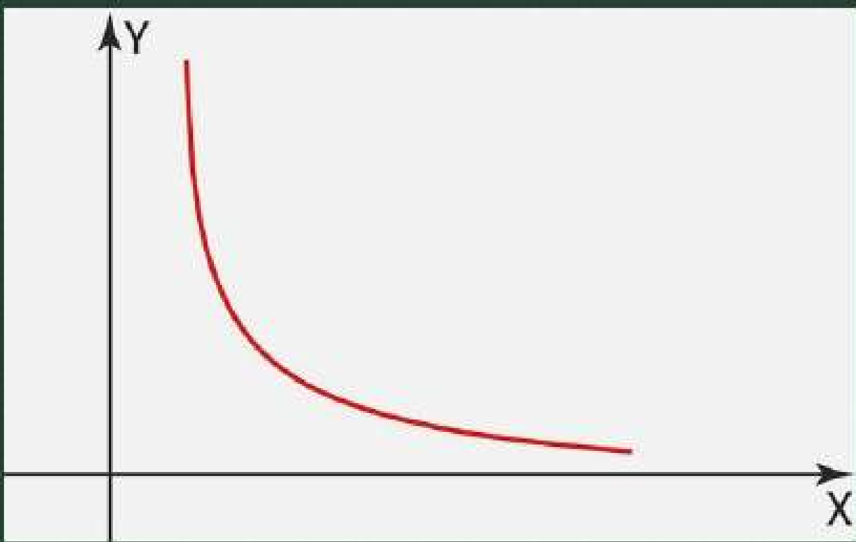
Quando relacionamos duas grandezas inversamente proporcionais, teremos que a multiplicação entre valores quaisquer correspondentes das grandezas é igual a um valor constante, ou seja,

$$x \cdot y = k,$$

com k constante.

Inversamente proporcionais

Assim, temos a equação $y = \frac{k}{x}$ e o seguinte gráfico



Problema 1

Uma fábrica mantém jornadas de trabalho de 6 horas para seus funcionários e, com essa jornada, a produção mensal é de 160 mil produtos. Quantas horas diárias serão necessárias para elevar a produção para 240 mil produtos?

Resolução do problema 1

Produção	...	160	...	240
Tempo (h)	...	6	...	x

Para resolver esse problema problema vamos utilizar o fato discutido desde o início do estudo. A razão entre grandezas diretamente proporcionais é constante. Assim, se x é a quantidade de horas, então

Resolução do problema 1

$$\frac{x}{240} = \frac{6}{160} \Rightarrow$$

Resolução do problema 1

$$\frac{x}{240} = \frac{6}{160} \Rightarrow \frac{240 \cdot x}{240} = \frac{240 \cdot 6}{160} \Rightarrow$$

Resolução do problema 1

$$\frac{x}{240} = \frac{6}{160} \Rightarrow \frac{240 \cdot x}{240} = \frac{240 \cdot 6}{160} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1440}{160} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 9}$$

Resolução do problema 1

Produção	...	160	...	240
Tempo (h)	...	6	...	x

$$
\begin{array}{cccc}
tempo & & prod. & \\
x & \uparrow & 240 & \uparrow \\
6 & \uparrow & 160 & \uparrow
\end{array}
$$

Resolução do problema 1

$$\frac{x}{6} = \frac{240}{160} \Rightarrow$$

Resolução do problema 1

$$\frac{x}{6} = \frac{240}{160} \Rightarrow \frac{6 \cdot x}{6} = \frac{6 \cdot 240}{160} \Rightarrow$$

Resolução do problema 1

$$\frac{x}{6} = \frac{240}{160} \Rightarrow \frac{6 \cdot x}{6} = \frac{6 \cdot 240}{160} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1440}{160} \Rightarrow$$

Resolução do problema 1

$$\frac{x}{6} = \frac{240}{160} \Rightarrow \frac{6 \cdot x}{6} = \frac{6 \cdot 240}{160} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1440}{160} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 9}$$

Problema 2

Qual é a velocidade de um automóvel que gasta 3 horas em um percurso, sabendo que gastaria 5 horas nesse mesmo percurso se estivesse a 60 km/h?

Resolução do problema 2

Tempo (h)	...	3	...	5
Velocidade (km/h)	...	x	...	60

Para resolver esse problema podemos aplicar aquilo que vale para a relação de grandezas inversamente proporcionais. Sabemos que

Resolução do problema 2

$$3 \cdot x = 5 \cdot 60 \Rightarrow$$

Resolução do problema 2

$$3 \cdot x = 5 \cdot 60 \Rightarrow 3x = 300 \Rightarrow$$

Resolução do problema 2

$$3 \cdot x = 5 \cdot 60 \Rightarrow 3x = 300 \Rightarrow$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{300}{3} \Rightarrow$$

Resolução do problema 2

$$3 \cdot x = 5 \cdot 60 \Rightarrow 3x = 300 \Rightarrow$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{300}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 100\ km/h}$$

Resolução do problema 2

Tempo (h)	...	3	...	5
Velocidade (km/h)	...	x	...	60

$$
\begin{array}{ccc}
km/h & & h \\
x & \uparrow & 3 \downarrow \\
60 & \uparrow & 5 \downarrow
\end{array}
$$

Resolução do problema 2

$$\begin{array}{ccc} km/h & & h \\ x & \uparrow & 5 \uparrow \\ 60 & \uparrow & 3 \uparrow \end{array}$$

$$\frac{x}{60} = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

Resolução do problema 2

$$\begin{array}{cccc} km/h & & h & \\ x & \uparrow & 5 & \uparrow \\ 60 & \uparrow & 3 & \uparrow \end{array}$$

$$\frac{x}{60} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{60 \cdot x}{60} = \frac{60 \cdot 5}{3} \Rightarrow$$

Resolução do problema 2

$$\begin{array}{ccc} km/h & & h \\ x & \uparrow & 5 \uparrow \\ 60 & \uparrow & 3 \uparrow \end{array}$$

$$\frac{x}{60} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{60 \cdot x}{60} = \frac{60 \cdot 5}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 100\ km/h}$$